Regolarità di Castelnuovo-Mumford

Vincenzo Galgano

23 luglio 2017

Sommario

In questa trattazione presentiamo la regolarità di Castelnuovo-Mumford, sia per moduli che per fasci coerenti, analizzando il caso di varietà aritmeticamente Cohen-Macaulay. Inoltre, dimostriamo il teorema di Castelnuovo-Mumford su fasci coerenti m-regolari e deduciamo la normale generazione di divisori D su una curva proiettiva liscia X nel caso $\deg(D) \geq 2g(X)$. Infine, enunciamo una generalizzazione del teorema di Castelnuovo su fasci ivertibili.

Indice

1 Nozioni preliminari **2**

1.1 Profondità, anelli di Cohen-Macaulay e sizigie 2

1.2 Coomologia locale 3

2 Regolarità di Castelnuovo-Mumford **4**

2.1 Regolarità di moduli 4

2.2 Varietà aritmeticamente Cohen-Macaulay 5

2.3 Regolarità di fasci coerenti 5

2.4 Regolarità e divisori normalmente generati 6

1 Nozioni preliminari

1.1 Profondità, anelli di Cohen-Macaulay e sizigie

Fissiamo A anello noetheriano ed M A-modulo finitamente generato.

$S \doteqdot \mathbb{K}[x_0 \dots x_r]$ (anello delle coordinate omogenee di $\mathbb{P}^r_{\mathbb{K}}$)

$\mathfrak{m}_s \doteqdot (x_1 \dots x_r) \subset S$ (id. irrilevante di S)

$\operatorname{supp}(M) \doteqdot \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) | M_{\mathfrak{p}} \neq 0\} = V(\operatorname{Ann}_A(M))$ (supporto)

$\operatorname{Ass}_A(M) \doteqdot \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) | A/p \hookrightarrow M\}$ (primi associati)

$\operatorname{pd}(M) \doteqdot \min\{n | \exists$ risoluzione proiettiva di lunghezza n$\}$ (dim. proiettiva)

$\dim(A) \doteqdot \max\{n | \exists \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_n \subset A$ primi$\}$ (dim. di Krull)

$\dim_A(M) \doteqdot \dim(A/\operatorname{Ann}_A(M))$ (dim. di A-modulo)

Una successione di elementi $a_1, \dots, a_k \in A$ è *M-regolare* se a_1 non è divisore dello zero per M e $\forall i > 1$ a_i non è divisore dello zero per $M/(a_1 \dots a_{i-1})M$. Poichè A è noetheriano, le successioni M-regolari sono finite. Vale il seguente:

Teorema (Grothendieck)**.** Sia I ideale di A tale che $IM \neq M$ e sia $n > 0$. Sono equivalenti:

1. $\forall k < n, \forall N A$-mod f.g. con $\operatorname{supp}(N) \subset V(I)$, $\operatorname{Ext}^k_A(N, M) = 0$;
2. $\forall k < n$, $\operatorname{Ext}^k_A(A/I, M) = 0$;
3. $\exists a_1 \dots a_n \in I$ successione M-regolare.

Sia $IM \neq M$. Definiamo *profondità* del modulo M rispetto all'ideale I

$$\operatorname{depth}(I, M) \doteqdot \max\{k | \exists a_1 \dots a_k \in I M\text{-regolare}\}$$

Notiamo che dal teorema precedente segue la definizione equivalente

$$\operatorname{depth}(I, M) \doteqdot \min\{i | \operatorname{Ext}^i_A(A/I, M) \neq 0\}$$

Nel caso di $(A, \mathfrak{m})$ anello locale indichiamo $\operatorname{depth}(M) = \operatorname{depth}(\mathfrak{m}, M)$. Valgono le seguenti proprietà:

1. (A locale) $\operatorname{depth}(M) = 0$ se e solo se $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}_A(M)$;
2. $\forall \mathfrak{p} \in Spec(A)$, $\operatorname{depth}(M_{\mathfrak{p}}) = 0$ se e solo se $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M)$;
3. se $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M)$, allora $\operatorname{depth}(\mathfrak{p}, M) = 0$;
4. $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, $\operatorname{depth}(M_{\mathfrak{p}}) \geq \operatorname{depth}(\mathfrak{p}, M)$;
5. (A locale) $\forall \mathfrak{p} \in Ass_A(M)$, $\operatorname{depth}(M) \leq \dim(A/\mathfrak{p})$.

Teorema (Auslander-Buchsbaum)**.** $\operatorname{depth}(A) = \operatorname{depth}(M) + \operatorname{pd}(M)$

Un anello noetheriano locale $(A, \mathfrak{m})$ è *regolare* se $\mathfrak{m}$ può essere generato con esattamente $\dim(A)$ generatori, o equivalentemente se $\dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim(A)$. In generale, per anelli locali vale $\operatorname{depth}(M) \leq \dim(A_{\mathfrak{m}})$. Se A è regolare, vale l'uguaglianza.

Un anello A è *Cohen-Macaulay* (*CM*) se $\forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A)$ vale $\operatorname{depth}(\mathfrak{m}, A) = \dim(A_{\mathfrak{m}})$. Da quanto detto prima, gli anelli locali regolari sono CM. Inoltre, *essere CM* è una proprietà locale e vale la seguente caratterizzazione: A CM se e solo se $A[x]$ CM.

Fissiamo ora $M = \oplus_{d \geq 0} M_d$ S-modulo graduato finitamente generato.

Data $H_M(d) \doteqdot \dim_{\text{sp.vett.}} M_d$ la *funzione di Hilbert*, vogliamo calcolare $H_M(d)$ confrontando M con moduli liberi attraverso delle risoluzioni libere. Definisco *modulo di twist* di grado a il modulo graduato $M(a)$ tale che $M(a)_d = M_{d+a}$, ossia ottenuto traslando i gradi di a. Dato $\{m_1 \dots m_k\}$ un sistema di generatori per M di grado rispettivamente a_i, definiamo $\phi_0 : F_0 \doteqdot \oplus S(-a_i) \to M$ in modo che $e_i \mapsto m_i$ e noto che il twist garantisce la conservazione del grado. Definiamo dunque $M_1 \doteqdot \operatorname{Ker}(\phi_0)$ *modulo delle sizigie* di M (è finitamente generato per il teorema della base di Hilbert). Iterando il processo sui generatori omogenei di M_1 (e così via) otteniamo la risoluzione libera graduata $\cdots \xrightarrow{\phi_i} F_{i-1} \xrightarrow{\phi_{i-1}} \cdots \xrightarrow{\phi_2} F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0$ di M. Poichè ciascun ϕ_i preserva il grado, otteniamo una successione esatta delle componenti omogenee come spazi vettoriali finiti e poniamo $H_M(d) = \sum_{i=0:\infty} (-1)^i H_{F_i}(d)$. In realtà questa somma è finita, come garantito dal seguente teorema.

Teorema (Sizigie di Hilbert)**.** Ogni S-modulo graduato finitamente generato ammette una risoluzione graduata libera finita di lunghezza $\geq r+1$.

Possiamo allora ottenere una formula più esplicita per il calcolo di $H_M(d)$. Sia $\mathbf{F}$ una risoluzione graduata libera m-finita per M con $F_i = \oplus_j S(-a_{i,j})$ S-moduli finitamente generati. Allora

$$H_M(d) = \sum_{i=0:m} (-1)^i \sum_j \binom{r+d-a_{i,j}}{r}$$

1.2 Coomologia locale

Siano $(X, \mathcal{O}_X)$ spazio anellato, $Z \subset X$ chiuso, $\mathscr{F}$ fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli. Il funtore $\Gamma_Z : \mathscr{F} \mapsto \operatorname{Ker}[\rho^X_{X \setminus Z} : \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(X \setminus Z)] = \{s \in \mathscr{F}(X) | s_x = 0 \forall x \notin Z\}$ è esatto a sinistra e possiamo considerarne il funtore derivato destro, definendo $H^i_Z(\mathscr{F})$ come l'*i-esimo gruppo di coomologia locale* di $\mathscr{F}$ a supporto in Z.

Vogliamo ora definire il gruppo di coomologia locale di un A-modulo M. Poniamo $H^0_I(M) \doteqdot \{m \in M | \exists r : mI^r = 0\} = \cup_{n \geq 0}(0 : I^n) \cong \varinjlim \operatorname{Hom}_A(A/I^n, M)$. Il funtore $H^0_i(-) : M \mapsto H^0_I(M)$ è esatto a sinistra, quindi ammette funtori derivati destri $H^i_I(-)$. Definiamo dunque $H^i_I(M)$ come l'*i-esimo modulo di coomologia locale* di M a supporto in $V(I)$. Nel caso di $(A, \mathfrak{m})$ locale, $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ è l'i-esimo modulo di coomologia locale di M. Notiamo inoltre che l'i-esimo funtore derivato destro di $\operatorname{Hom}_A(A/I^n, M)$ è proprio $\operatorname{Ext}^i_A(A/I^n, M)$: segue dunque che $H^i_I(M) \cong \varinjlim \operatorname{Ext}^i_A(A/I^n, M)$.

Vediamo dunque una relazione tra la coomogia locale di un modulo e la sua profondità.

Proposizione. Siano A anello noetheriano, M A-modulo finitamente generato e I ideale tale che $IM \neq M$. Allora $\operatorname{depth}(I, M) = \min\{i | H^i_I(M) \neq 0\}$.

2 Regolarità di Castelnuovo-Mumford

2.1 Regolarità di moduli

Sia M un S-modulo graduato finitamente generato e sia $\cdots \to F_i \to F_i - 1 \to \cdots \to F_0$ una sua risoluzione libera minimale con $F_i = \oplus_j S(-a_{i,j})^{\beta_{i,j}}$. Definiamo *regolarità* di M

$$\operatorname{reg}(M) \doteqdot \max_{i,j}\{a_{i,j} - i | i, j \geq 0\}$$

Vediamo ora una caratterizzazione della regolarità di un modulo in termini della sua coomologia locale. Per una dimostrazione del seguente teorema e della proposizione successiva, si rimanda a *The Geometry of Syzygies* di D. Eisenbud [ch. 4].

Teorema 1 (Caratterizzazione della regolarità)**.** Sono equivalenti:

1. $d \geq \operatorname{reg}(M)$;
2. $d \geq \max\{e | H^i_{\mathfrak{m}}(M)_e \neq 0\} + i, \ \forall i \geq 0$;
3. $d \geq \max\{e | H^0_{\mathfrak{m}}(M)_e \neq 0\}$ e $H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{d-i+1} = 0, \ \forall i > 0$.

Diciamo che M è *debolmente d-regolare* se $H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{d-i+1} = 0, \ \forall i > 0$, mentre è d-regolare se è dolmente d-regolare e $d \geq \operatorname{reg}(H^0_{\mathfrak{m}}(M))$.

Corollario. M è d-regolare se e solo se $d \geq \operatorname{reg}(M)$.

Possiamo dunque definire la regolarità di un modulo in funzione solo della sua coomologia locale

$$\operatorname{reg}(M) \doteqdot \min\{d \mid M \ d\text{-regolare}\}$$

Tuttavia affinchè tale definizione sia utile, occorre che la regolarità degli $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ sia facilmente calcolabile. A breve vedremo che lo è per moduli artiniani, e un teorema di *dualità locale* garantisce che, se M è un S-modulo graduato finitamente generato, allora $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ è S-modulo graduato artiniano.

Per ogni $x \in S$ consideriamo il sottomodulo $(0 :_M x) \doteqdot \{m \in M | xm = 0\} \subset M$. Vale che $(0 :_M x) = 0$ se e solo se x è elemento regolare di M (ossia non è divisore dello zero). Diciamo che x è *quasi-regolare* su M se $l(0 :_M x) < \infty$. Vale il seguente risultato.

Lemma. Se $\mathbb{K}$ è infinito, esiste f polinomio omogeneo che sia quasi-regolare su M.

Proposizione 2. Sia $x \in S$ un polinomio lineare omogeneo quasi-regolare su M. Allora:

1. se M è debolmente d-regolare, allora M/xM è debolmente d-regolare;
2. se M è (deb.$^{\text{nte}}$) d-regolare, allora M è (deb.$^{\text{nte}}$) $(d+1)$-regolare;
3. M è d-regolare se e solo se M/xM e $H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ sono d-regolari.

Dall'ultimo punto della proposizione segue che:

Corollario. Se x è quasi-regolare su M, allora $\operatorname{reg}(M) = \max\{\operatorname{reg}(H^0_{\mathfrak{m}}(M)), \operatorname{reg}(M/xM)\}$.

Abbiamo allora un'importante caratterizzazione della regolarità per moduli di lunghezza finita:

Corollario. Se $l(M) < \infty$, allora $\operatorname{reg}(M) = \max\{d | M_d \neq 0\}$.

Abbiamo quindi un'altra definizione di regolarità nel caso artiniano. Dato M un S-modulo graduato artiniano, definiamo

$$\operatorname{reg}(M) \doteqdot \max\{d | M_d \neq 0\}$$

In particolare, la regolarità di un modulo artiniano non dipende dalla sua struttura di S-modulo, ossia non dipende dall'anello S ma dalla sua graduazione.

2.2 Varietà aritmeticamente Cohen-Macaulay

Sia M un S modulo graduato finitamente generato. Sia $x \in S$ regolare per M (ossia non divisore dello zero): allora $\operatorname{depth}(M) \geq 1$. Poichè $\operatorname{depth}(M) = \min\{i | H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0\}$, si ha $H^0_{\mathfrak{m}}(M) = 0$. Dal punto (3) della proposizione 2 e dalla caratterizzazione della regolarità, sappiamo che $\operatorname{reg}(M) = \operatorname{reg}(M/xM)$. Per moduli di Cohen-Macaulay (CM) posso estendere tale relazione ad un'intera successione regolare.

Proposizione. Sia M un S-modulo CM e sia $(y_1 \dots y_k)$ una successione M-regolare massimale di polinomi lineari. Allora

$$\operatorname{reg}(M) = \max\{d | (M/(y_1 \dots y_k)M)_d \neq 0\}$$

Siano $X \subset \mathbb{P}^r_{\mathbb{K}}$ una varietà proiettiva, I_X il suo ideale associato ed $S_X \doteqdot S/I_X$ il suo anello delle coordinate. Diciamo che X è *non degenere* se non è contenuta in alcun iperpiano.

Definiamo la *regolarità* della varietà proiettiva X come $\operatorname{reg}(X) \doteqdot \operatorname{reg}(I_X)$. Notiamo che $\operatorname{reg}(I_X) = \operatorname{reg}(S_X) + 1$. Una varietà proiettiva è *artimeticamente Cohen-Macaulay* (*ACM*) se il suo anello delle coordinate S_X è CM. La regolarità di varietà ACM può essere limitata dall'alto in termini puramente geometrici. Vale infatti:

Teorema. Sia $X \subset \mathbb{P}^r_{\mathbb{K}}$ una varietà ACM non degenere. Allora

$$\operatorname{reg}(S_X) \leq \deg(X) + \operatorname{codim}(X)$$

2.3 Regolarità di fasci coerenti

Vediamo ora la teoria originale della regolarità sviluppata da Mumford per fasci coerenti. Fissiamo $\mathbb{P}^r = \mathbb{P}^r_{\mathbb{K}}$. Quanto vedremo vale in generale per ogni varietà proiettiva $X \subset \mathbb{P}^r$, ma per comodità lavoreremo su $X = \mathbb{P}^r$. Dato $\mathscr{F}$ un fascio algebrico coerente su X, indichiamo con $\mathscr{F}(k) \doteqdot \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(k)\ \forall k \in \mathbb{Z}$.

Il fascio $\mathscr{F}$ è *m-regolare* se $\forall i > 0$ vale $H^i(X, \mathscr{F}(m-i)) = 0$. Notiamo che ogni fascio coerente è m-regolare per qualche m: infatti dal teorema di annullamento di Serre sappiamo che $\exists n_0$ tale che $H^i(X, \mathscr{F}(n)) = 0\ \forall n \geq n_0, \forall i$ e che $H^i(X, \mathscr{F}(n)) = 0\ \forall i > \dim X, \forall n$, per cui pasta porre $m = n_0 + \dim X$.

Definiamo la *regolarità di Castelnuovo-Mumford* di un fascio coerente $\mathscr{F}$ come

$$\operatorname{reg}(\mathscr{F}) \doteqdot \min\{m | \mathscr{F}\ m\text{-regolare}\}$$

Vediamo quindi come questa regolarità si lega a quella definita via coomologia locale per moduli.

Proposizione 3. Sia M un S-modulo graduato finitamente generato e sia $\tilde{M}$ il fascio coerente su X associato a M. Allora M è d-regolare se e solo se:

1. $\tilde{M}$ è d-regolare;

2. $H^0_{\mathfrak{m}}(M)_e = 0, \ \forall e > d$;

3. $M_d \twoheadrightarrow H^0(\tilde{M}(d))$ è surgettiva.

Dimostrazione. Sappiamo che $H^i_{\mathfrak{m}}(M)_e = H^{i-1}(X, \tilde{M}(e)) \ \forall i \geq 2$. Segue che M è d-regolare se e solo se valgono $(1), (2)$ e $H^1_{\mathfrak{m}}(M)_e = 0 \ \forall e \geq d$. Dall'esattezza di

$$0 \to H^0_{\mathfrak{m}}(M)_e \to M_e \to H^0(X, \tilde{M}(e)) \to H^1_{\mathfrak{m}}(M)_e \to 0$$

segue che (3) è equivalente alla condizione $H^1_{\mathfrak{m}}(M)_e = 0 \ \forall e \geq d$. □

Corollario. Vale $\operatorname{reg}(M) \geq \operatorname{reg}(\tilde{M})$. In particolare, si ha l'uguaglianza se e solo se $M = \oplus_n H^0(X, \tilde{M}(n))$.

Dimostrazione. La condizione sull'uguaglianza segue dalla successione esatta vista nella dimostrazione precedente. Per verificare la disuguaglianza, consideriamo $\tilde{M}$ $\operatorname{reg}(M)$-regolare, ossia $H^p(X, \tilde{M}(\operatorname{reg}(M)-p)) = 0, \ \forall p > 0$. Per $p \geq 2$ vale l'isomorfismo $H^{p-1}(X, \tilde{M}(\operatorname{reg}(M)-p+1)) \cong H^p_{\mathfrak{m}}(M)_{\operatorname{reg}(M)-p+1}$. Ma $\forall p \geq 1, \ H^p_{\mathfrak{m}}(M)_{\operatorname{reg}(M)-p+1} = 0$. Segue che $\forall p \geq 1, \ H^p(X, \tilde{M}(\operatorname{reg}(M) - p)) = 0$, ossia $\operatorname{reg}(\tilde{M}) \leq \operatorname{reg}(M)$. □

Partiamo ora da un fascio coerente $\mathscr{F}$ non nullo su X e definiamo l' *S-modulo graduato associato* come $R(\mathscr{F}) \doteqdot \oplus_n H^0(X, \mathscr{F}(n))$. Notiamo che in generale questo modulo non è finitamente generato, ma lo è ogni suo troncamento $R_{n_0}(\mathscr{F}) \doteqdot \oplus_{n \geq n_0} H^0(X, \mathscr{F}(n))$. Per tali moduli vale $\operatorname{reg}(R_{n_0}(\mathscr{F})) = \max\{\operatorname{reg}(\mathscr{F}), n_0\}$. Vale inoltre il seguente risultato che ritroveremo nell'ultima sezione.

Corollario 4. Sia $\mathscr{F}$ coerente d-regolare. Allora $\mathscr{F}(d)$ è generato dalle sezioni globali. Inoltre, $\mathscr{F}$ è e-regolare $\forall e \geq d$.

Dimostrazione. Il modulo $M = R_d(\mathscr{F})$ è d-regolare per quanto detto sopra, quindi generato da elementi di grado d, ossia da $H^0(\mathscr{F}(d))$. Poichè $\tilde{M} = \mathscr{F}$, $\mathscr{F}(d)$ è generato dalle sezioni globali. Inoltre, per la proposizione 2 M è e-regolare $\forall e \geq d$ e sempre per quanto detto sopra abbiamo che $\mathscr{F}$ è e-regolare. □

2.4 Regolarità e divisori normalmente generati

Il risultato principale provato da Mumford ma da lui stesso attribuito a Castelnuovo è il seguente:

Teorema 5 (Castelnuovo-Mumford)**.** Sia $\mathscr{F}$ un fascio m-regolare. Allora:

1. $\mathscr{F}$ è n-regolare $\forall n \geq m$;

2. vi è una surgezione $H^0(X,\mathscr{F}(p-1))\otimes H^0(X,\mathcal{O}_X(1)) \twoheadrightarrow H^0(X,\mathscr{F}(p)),\ \forall p>m.$

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su $r=\dim\mathbb{P}^r$. Per $r=0$ il risultato è ovvio. Sia $r>0$ e scegliamo un iperpiano $H\subset\mathbb{P}^r=X$ tale che $H\cap\operatorname{supp}(\mathscr{F})=\emptyset$. Consideriamo la successione esatta tensorizzata

$$\mathscr{F}(p)\otimes[0\to\mathcal{O}_X(-H)\cong\mathcal{O}_X(-1)\to\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_H\to 0]$$

Per ogni $x\in X$, se f è un'equazione locale per H in x, la moltiplicazione per f in $\mathscr{F}_x$ è iniettiva, poichè per costruzione f è invertibile per tutti i primi associati a $\mathscr{F}_x$. Abbiamo quindi la sequenza esatta

$$0\to\mathscr{F}(p-1)\to\mathscr{F}(p)\to(\mathscr{F}\otimes\mathcal{O}_H)(p)\to 0$$

da cui $H^i(\mathscr{F}(m-i))\to H^i(\mathscr{F}_H(m-i))\to H^{i+1}(\mathscr{F}_H(m-i-1))$ è esatta. Allora se $\mathscr{F}$ è m-regolare, il fascio $\mathscr{F}_H$ su H è m-regolare. Poichè $H\cong\mathbb{P}^{r-1}$, applichiamo l'ipotesi induttiva sul fascio $\mathscr{F}_H$; in particolare, $H^{i+1}(\mathscr{F}(m-i-1))\to H^{i+1}(\mathscr{F}(m-i))\to H^{i+1}(\mathscr{F}_H(m-i))$.
Se $i\geq 0$, $H^{i+1}(\mathscr{F}_H(m-i))=0$ (per il punto (1) applicato a $\mathscr{F}_H$) e $H^i+1(\mathscr{F}(m-i-1))=0$ (per m-regolarità di $\mathscr{F}$): segue che $H^i+1(\mathscr{F}(m-i))=0$, ovvero $\mathscr{F}$ è $(m+1)$-regolare. Iterando, si ottiene il punto (1).
Consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & H^0(\mathscr{F}(p-1))\otimes H^0(\mathcal{O}_X(1)) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\mu"'] & H^0(\mathscr{F}_H(p-1))\otimes H^0(\mathcal{O}_H(1)) \arrow[d, "\tau"] \\
H^0(\mathscr{F}(p-1)) \arrow[r] & H^0(\mathscr{F}(p)) \arrow[r, "\nu"] & H^0(\mathscr{F}_H(p))
\end{tikzcd}$$

Notiamo che σ è surgettiva se $p>m$, poichè $H^1(\mathscr{F}(p-2))=0$. Inoltre, τ è surgettiva se $p>m$, per il punto (2) su $\mathscr{F}_H$ (ipotesi induttiva). Segue che $\nu(\operatorname{Im}\mu)=H^0(\mathscr{F}_H(p))$, ovvero $H^0(\mathscr{F}(p))$ è generato da $\operatorname{Im}\mu$ e da $H^0(\mathscr{F}(p-1))$.
Sia $h\in H^0(X,\mathcal{O}_X(1))$ l'equazione globale per H. Allora l'immagine di $H^0(\mathscr{F}(p-1))$ in $H^0(\mathscr{F}(p))$ è proprio $h\otimes H^0(\mathscr{F}(p-1))$, ovvero è anche in $\operatorname{Im}\mu$. Segue che μ è surgettiva, ossia il punto (2) per $\mathscr{F}$ è verificato. $\square$

Corollario. Se $\mathscr{F}$ è m-regolare, $\mathscr{F}(p)$ è generato come $\mathcal{O}_X$-modulo dalle sezioni globali $\forall p\geq m$.

Questo risultato ha stretto legame con lo studio dei divisori normalmente generati. Un fascio invertibile $\mathscr{F}$ su X è *normalmente generato* se $\forall k>0$ si ha la surgezione

$$\rho_k:(H^0(X,\mathscr{F}))^{\otimes k}\twoheadrightarrow H^0(X,\mathscr{F}^{\otimes k})$$

ossia se il modulo associato $R(\mathscr{F})\doteqdot\oplus_{k>0}H^0(X,\mathscr{F}^{\otimes k})$ è generato in grado 1. Analogamente, un divisore D su una curva proiettiva liscia $X\subset\mathbb{P}^r$ è *normalmente generato* se lo è il fascio invertibile $\mathcal{O}_X[D]$.

Ci interessiamo ora al caso in cui $\mathscr{F}=\mathcal{O}_X[D]$ con $D\in\operatorname{Div}(X)$ divisore su una curva proiettiva liscia $X\subset\mathbb{P}^r$ di genere g. Ci chiediamo sotto quali condizioni il divisore D sia normalmente generato. Per il teorema di Castelnuovo-Mumford, ci basta che il fascio $\mathcal{O}_X[D]$ sia 0-regolare, ossia che $\forall i>0$ si abbia $H^i(X,\mathcal{O}_X[D](-i))=0$. Notiamo da subito che, poichè

$\dim_{\mathbb{C}} X = 1$, $H^i(X, \mathcal{O}_X[D](-i)) = 0 \ \forall i \geq 2$: resta dunque da studiare $H^1(X, \mathcal{O}_X[D](-1))$. Notiamo che $\mathcal{O}_X[D](-1) \cong \mathcal{O}_X[D] \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-1)$ è un fascio invertibile di grado $d = \deg(D) - 1$. Segue che, se $\deg(D) \geq 2g$, si ha $d \geq 2g - 1$, da cui $H^1(X, \mathcal{O}_X[D](-1)) = 0$.

Concludiamo che se $\deg(D) \geq 2g$, allora il fascio coerente $\mathcal{O}_X[D]$ è 0-regolare. Applicando il teorema 5, si ottiene il seguente:

Teorema. Ogni divisore $D \in \mathrm{Div}(X)$ di grado $\geq 2g$ è normalmente generato.

Questo risultato permette di dimostrare il teorema di Chow su superfici di Riemann compatte: ogni curva analitica nello spazio proiettivo è curva algebrica.

Concludiamo ora presentando una generalizzazione di un lemma di Castelnuovo su sistemi lineari *base point free* (*bpf*), per la cui dimostrazione si rimanda a *Divisors normally generated on reduced curves* di M. Franciosi [Quaderni Università di Pisa, 1998]:

Teorema. Siano $\mathscr{F}$ e $\mathscr{H}$ due fasci invertibili su X tali che

1. $H^1(\mathscr{H} \otimes \mathscr{F}^{-1}) = 0$;
2. il sistema lineare associato $|\mathscr{F}|$ è bpf.

Allora vi è la surgezione $H^0(X, \mathscr{H}) \otimes H^0(X, \mathscr{F}) \twoheadrightarrow H^0(X, \mathscr{H} \otimes \mathscr{F})$.

Notiamo soltando che, dato $D \in \mathrm{Div}(X) : \deg(D) \geq 2g$, il fascio invertibile $\mathcal{O}_X[D]$ soddisfa le condizioni del teorema: infatti è invertibile, $(\mathcal{O}_X[D])^{-1} = \mathcal{O}_X[-D]$ e, per $\deg(D) \geq 2g$, $|D|$ è bpf. Quindi, come visto prima, un divisore di grado $\geq 2g$ è normalmente generato.